Grundlagen der Algebra I

Definition "Polynom"

Der Term

$$a_n x^n + a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_o x^o$$

$$= a_n x^n + a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_o$$

mit $a_n \in R$ heißt **Polynom n-ten Grades** in x.

Beispiel

Bei folgendem Polynom

$$-3 x^4 - x^3 + 7 x + 13$$

gilt

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \text{für alle } n > 4\text{:} \ a_n = 0 ; & & & & \\ a_4 = -3 ; & a_3 = -1 ; & a_2 = 0 ; & a_1 = 7 ; & a_o = 13 \end{array} \right.$$

Darstellung

Zur vereinfachten Darstellung von Polynomen dient das Summenzeichen Σ. Damit ergibt sich dann

$$a_n x^n + a_{n-1} x^n + a_{n-2} x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_o x^o$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Grundlagen der Algebra II

Hauptsatz der Algebra *(stark vereinfacht[1])*

Die Gleichung (1)

$$x^n + a_{n-1}\, x^n + a_{n-2}\, x^n + ... + a_2\, x^2 + a_1\, x^1 + a_o\, x^o$$

$$= \quad x^n + a_{n-1}\, x^n + a_{n-2}\, x^n + ... + a_2\, x^2 + a_1\, x + a_o$$

$$= \quad 0$$

mit $a_n = 1$ und $a_i \in \mathbf{R}$ für $i < n$ hat maximal n reelle Lösungen.

Linearfaktorzerlegung

Sind die Lösungen von (1) genau die reellen Zahlen x_1, x_2, ...x_n, dann läßt sich (1) durch das Produkt

$$(x - x_1) * (x - x_2) * ... * (x- x_n)$$

bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig darstellen.

Beispiel

Das Polynom 3. Grades

$$(2) \qquad x^3 - 4\, x^2 + 1\, x + 6 = 0$$

hat maximal 3 reelle Lösungen.[2] Die Lösungen von (1) sind die reellen Zahlen

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +2, \quad x_3 = +3$$

Nach dem Hauptsatz ist die Lösungsmenge vollständig. Dann läßt sich (2) durch

$$(x + 1) * (x - 2) * (x- 3)$$

---

1 Dies bedeutet, daß z.B. komplexe Lösungen der nachstehenden Gleichung (1) nicht berücksichtigt werden. Weiterhin ist nachstehende Gleichung normiert. Ebensowenig ist hier $a_i \in \mathbf{I}$ oder $a_i \in \mathbf{C}$ zugelassen.

2 Der Hauptsatz liefert kein Lösungsverfahren. Die Lösungen sind im Einzelfall nur schwer zu bestimmen. Dafür stehen Näherungsverfahren wie z.B. die *Regula falsi*, das *Newtonverfahren* oder Programme wie z.B. die Zielwertsuche in *EXCEL* zur Verfügung. Hat man allerdings n (hier 3) Lösungen gefunden, ist man auf Grund des Hauptsatzes sicher, alle Lösungen zu kennen.

darstellen, d.h. es gilt

(3) $x^3 - 4x^2 + 1x + 6 = (x + 1) * (x - 2) * (x - 3)$

Die Linearfaktorzerlegung ist eindeutig.

Anmerkung "Polynomdivision"

Das Polynom (2) enthält wegen (3) den Faktor ***(x + 1)***. Dann muß sich (2) durch ***(x + 1)*** dividieren lassen. Dies ist tatsächlich möglich. Polynomdivision führt zu folgender Gleichung

(4) $x^3 - 4x^2 + 1x + 6 = (x + 1) * \boldsymbol{(x^2 - 5x + 6)}$

Die Nullstellen des Faktors $\boldsymbol{(x^2 - 5x + 6)}$ sind dann leicht durch Näherungsverfahren oder in diesem Falle die Formel von *VIETA* zu ermitteln.

Anmerkung "Raten der ersten Lösung"

Das Polynom (2) enthält wegen (3) den Faktor ***(x + 1)***. Dann muß sich (2) durch ***(x + 1)*** dividieren lassen. Dies ist tatsächlich möglich. Polynomdivision führt zu folgender Gleichung

(5) $x^3 - 4x^2 + 1x + 6 = (x + 1) * (x - 2) * (x - 3)$

Multipliziert man (5) von links nach rechts aus, dann ist der erste Summand gleich

$$x * x * x = x^3$$

usw. Der letzte Summand ist dann

$$(+1) * (-2) * (-3) = +6$$

Das bedeutet, daß alle Lösungen x_1, x_2, x_3 als "*Faktoren*" in (+6) enthalten sein müssen. Es ist dann eine Frage der numerischen Mathematik, einen oder mehrere von ihnen mit einer effizienten Berechnungstechnik ("durch systematisches Probieren") zu ermitteln.