Geometrische Interpretation von Matrizen/ Matrizenmultiplikation

Wir benötigen zunächst folgende Tabelle für verschiedene Winkel und deren Umrechnung in das Bogenmaß und die entsprechenden Sinus- und Kosinuswerte.

α [°]	α [Bogenmaß]	sin (α)	cos(α)
90	*1,570795*	*1,0000*	*0,0000*
45	*0,7853975*	*0,7071*	*0,7071*
60	*1,047196667*	*0,8660*	*0,5000*

1. <u>Drehung eines Vektor um 90° (im UZS</u>)

Der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wird um den Winkel α = 90° im Uhrzeigersinn gedreht (Rotation um den Ursprung). Der um α im UZS gedrehte Vektors $\vec{u}$ besitzt offensichtlich die Koordinaten[1]

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Da nun aber

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ist, dürfen wir die Matrix

$$\mathbf{D}_{(-90)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

geometrisch als eine Drehung des Vektors $\vec{v}$ um 90° in der xy-Ebene im UZS interpretieren.

---

[1] Das Skalarptodukt $\vec{u} * \vec{v}$ =ist gleich 0.

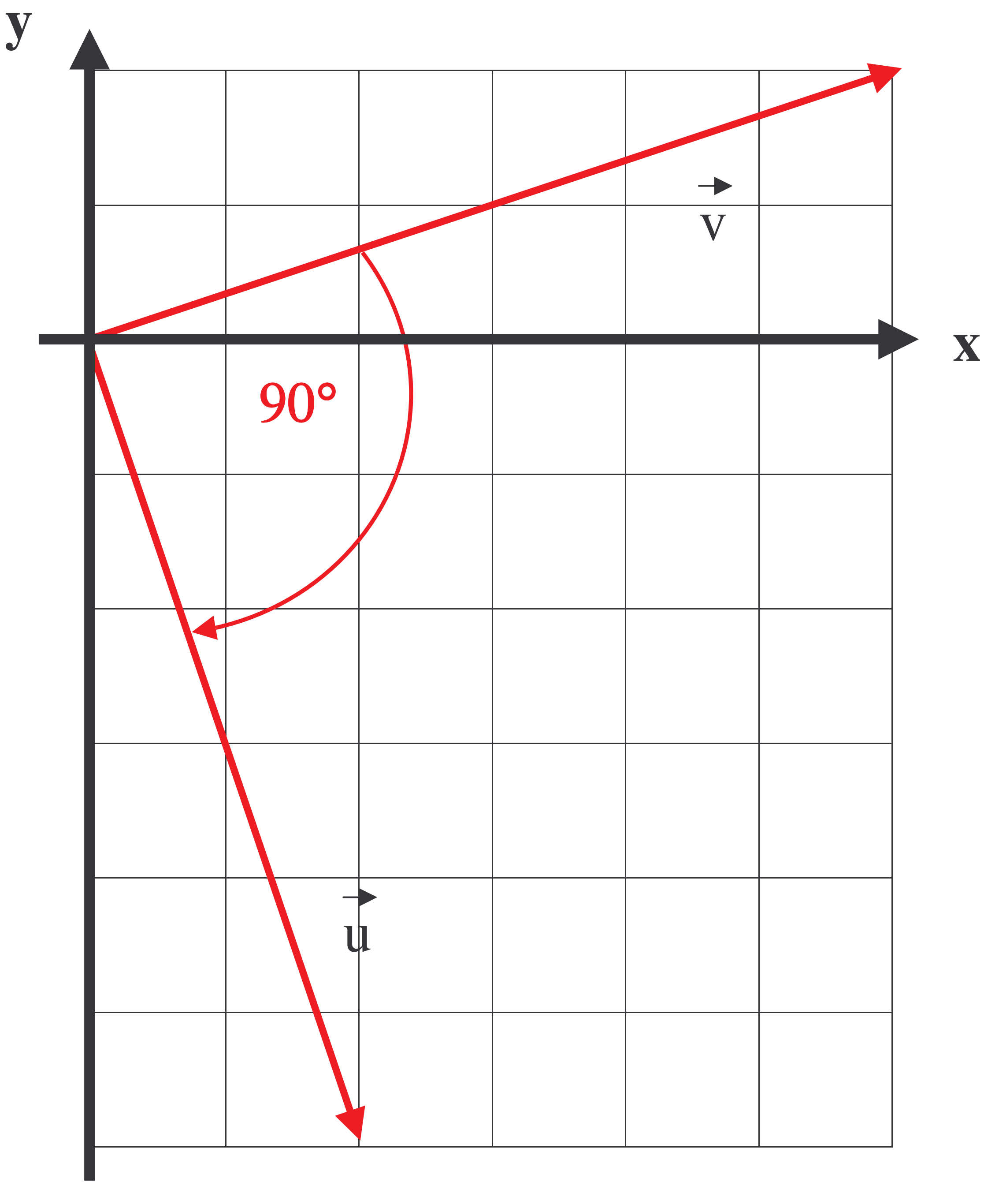

Abb.1 Drehung in der xy-Ebene um 90° im Uhrzeigersinn

2. **Drehung eines Vektor um 60° (im UZS)**

Der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

wird in der xy-Ebene um den Winkel α = 60° im Uhrzeigersinn gedreht (Rotation um den Ursprung). Die Koordinaten des gedrehten Vektors $\vec{u}$ besitzt die Koordinaten[2]

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4{,}73 \\ -4{,}19 \end{pmatrix}$$

Dies wird durch das Skalarprodukt leicht nachgewiesen.[3] **Da nun aber**

$$\begin{pmatrix} 0{,}8660 & 0{,}5000 \\ -0{,}5000 & 0{,}8660 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}73 \\ -4{,}19 \end{pmatrix}$$

ist, dürfen wir die Matrix

$$\mathbf{D}_{(-60)} = \begin{pmatrix} 0{,}8660 & 0{,}5000 \\ -0{,}5000 & 0{,}8660 \end{pmatrix}$$

geometrisch als eine Drehung des Vektors $\vec{v}$ um 60° in der xy-Ebene im UZS interpretieren.

---

[2] Werte auf zwei dezimalstellen genau, nicht gerundet.

[3] Es gilt ***arc cos*** [6*4,73 + (-4,19)*2)/40] =***arc cos*** (0,5000) = *1,047196667* .

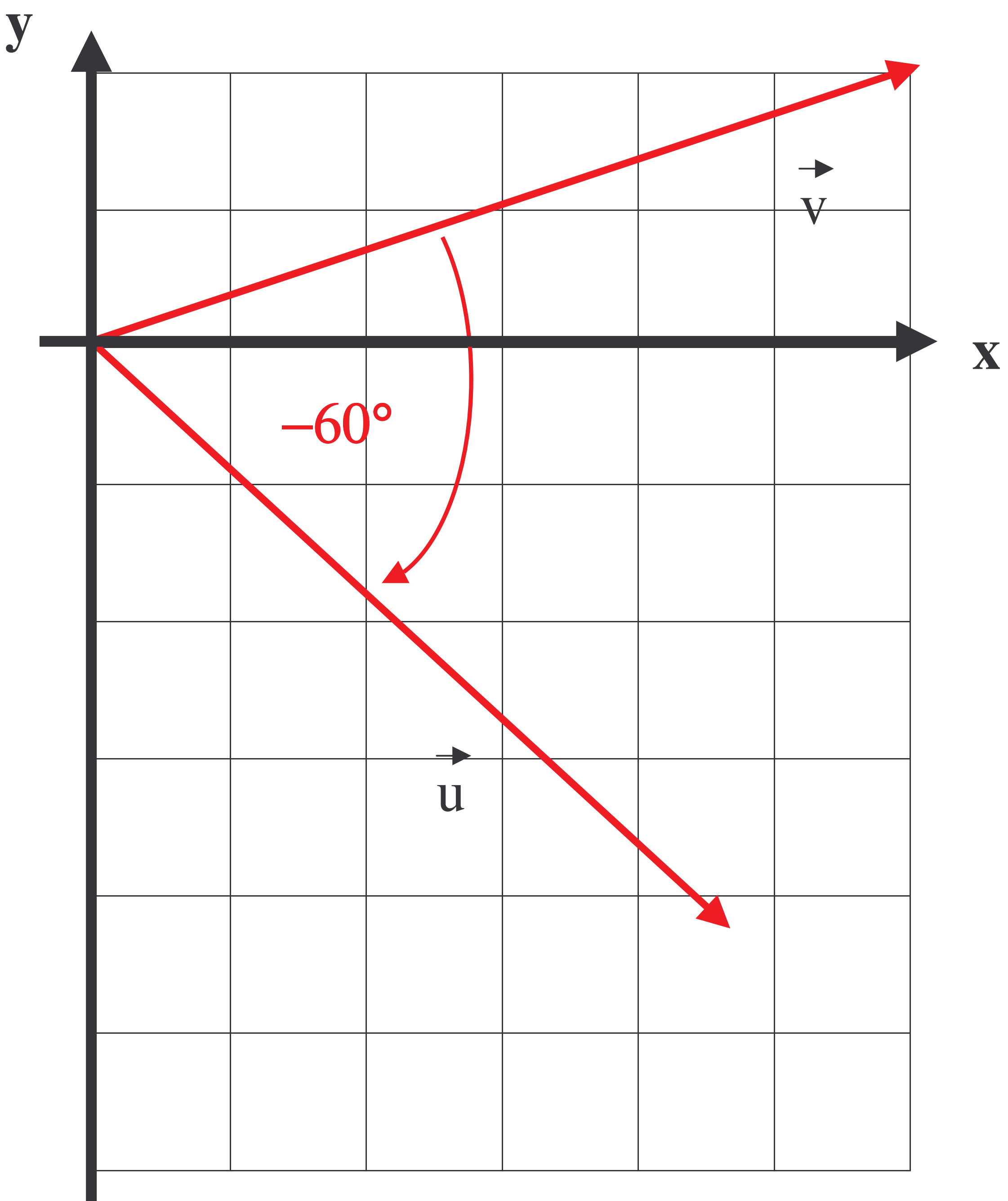

Abb.2 Drehung in der xy-Ebene um 60° gegen den Uhrzeigersinn

1. **<u>Rotationsmatrix (2D): Drehung eines Vektor um α (im UZS)</u>**

Der Vektor

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

wird in der xy-Ebene um den Winkel α im Uhrzeigersinn gedreht (Rotation um den Ursprung). Der um α im UZS gedrehte Vektor $\vec{u}$ besitzt also die Koordinaten

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} * \vec{v}$$

Daher dürfen wir die Matrix

$$D_{(-\alpha)} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

geometrisch als eine Drehung des Vektors $\vec{v}$ um α in der xy-Ebene im UZS interpretieren.