

Integration. Produktregel (3)

Das Integral

$$\mathfrak{J} = \int x^2 \cdot e^{-2x} \cdot dx$$

ist ein Produkt der Faktoren

$$u'(x) = e^{-2x}$$

$$v(x) = x^2$$

Dann ergibt sich mit

$$u(x) = -x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2x}$$

$$v'(x) = 2 \cdot x$$

bei partieller Integration

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= -x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} - \int 2 \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x} \cdot dx \\ &= -x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + \int x \cdot e^{-2x} \cdot dx\end{aligned}$$

Da

$$\int x \cdot e^{-2x} \cdot dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2x} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$$

gilt¹, ist dann

$$\begin{aligned}\mathfrak{J} &= -x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= -x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-2x} - \left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x} \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x} \cdot \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

¹ Vgl. Ableitung.Substitutionsregel(1)

Also ist

$$\int x^2 \cdot e^{-2x} \cdot dx = -\left(\frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x} \cdot \left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right)$$
