

Grundlagen der Algebra II

Hauptsatz der Algebra (stark vereinfacht¹)

Die Gleichung (1)

$$\begin{aligned} & x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 x^0 \\ = & x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \\ = & 0 \end{aligned}$$

mit $a_n = 1$ und $a_i \in \mathbf{R}$ für $i < n$ hat maximal n reelle Lösungen.

Linearfaktorzerlegung

Sind die Lösungen von (1) genau die reellen Zahlen x_1, x_2, \dots, x_n , dann läßt sich (1) durch das Produkt

$$(x - x_1) * (x - x_2) * \dots * (x - x_n)$$

bis auf die Reihenfolge der Faktoren eindeutig darstellen.

Beispiel

Das Polynom 3. Grades

$$(2) \quad x^3 - 4x^2 + 1x + 6 = 0$$

hat maximal 3 reelle Lösungen.² Die Lösungen von (1) sind die reellen Zahlen

$$x_1 = -1, \quad x_2 = +2, \quad x_3 = +3$$

Nach dem Hauptsatz ist die Lösungsmenge vollständig. Dann läßt sich (2) durch

¹ Dies bedeutet, daß z.B. komplexe Lösungen der nachstehenden Gleichung (1) nicht berücksichtigt werden. Weiterhin ist nachstehende Gleichung normiert. Ebensovienig ist hier $a_i \in \mathbf{I}$ oder $a_i \in \mathbf{C}$ zugelassen.

² Der Hauptsatz liefert kein Lösungsverfahren. Die Lösungen sind im Einzelfall nur schwer zu bestimmen. Dafür stehen Näherungsverfahren wie z.B. die *Regula falsi*, das *Newtonverfahren* oder Programme wie z.B. die Zielwertsuche in *EXCEL* zur Verfügung. Hat man allerdings n (hier 3) Lösungen gefunden, ist man auf Grund des Hauptsatzes sicher, alle Lösungen zu kennen.

$$(x + 1) * (x - 2) * (x - 3)$$

darstellen, d.h. es gilt

$$(3) \quad x^3 - 4x^2 + 1x + 6 = (x + 1) * (x - 2) * (x - 3)$$

Die Linearfaktorzerlegung ist bis auf die Reihenfolge der Linearfaktoren eindeutig.

Anmerkung "Polynomdivision"

Das Polynom (2) enthält wegen (3) den Faktor $(x + 1)$. Dann muß sich (2) durch $(x + 1)$ dividieren lassen. Dies ist tatsächlich möglich. Polynomdivision führt zu folgender Gleichung

$$(4) \quad x^3 - 4x^2 + 1x + 6 = (x + 1) * (x^2 - 5x + 6)$$

Die Nullstellen des Faktors $(x^2 - 5x + 6)$ sind dann leicht durch Näherungsverfahren oder in diesem Falle die Formel von *VIETA* zu ermitteln.

Anmerkung "Raten der ersten Lösung"

Das Polynom (2) enthält wegen (3) den Faktor $(x + 1)$. Dann muß sich (2) durch $(x + 1)$ dividieren lassen. Dies ist tatsächlich möglich. Polynomdivision führt zu folgender Gleichung

$$(5) \quad x^3 - 4x^2 + 1x + 6 = (x + 1) * (x - 2) * (x - 3)$$

Multipliziert man (5) von links nach rechts aus, dann ist der erste Summand gleich

$$x * x * x = x^3$$

usw. Der letzte Summand ist dann

$$(+1) * (-2) * (-3) = +6$$

Das bedeutet, daß alle Lösungen x_1, x_2, x_3 als "*Faktoren*" in (+6) enthalten sein müssen. Es ist dann eine Frage der numerischen Mathematik, einen oder mehrere von ihnen mit einer effizienten Berechnungstechnik ("durch systematisches Probieren") zu ermitteln.