Beh.: Die Zufallsvariable X sei B(4; p; k)-verteilt, d.h. *binomial*verteilt mit den Parametern n=4 und der Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt für den Erwartungswert von X :

$$E(X) = 4p.$$

Beweis

Seien n = 4 und k = 0, 1, 2, 3, 4. Dann gilt nach der Definition des Erwartungswertes

$$E\,(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 + p_4x_4 + p_5x_5$$

Da $x_k = k$ und $p_k = b\,(4; p; k)$ ist, gilt:

$$= 0 * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} p^0 q^4 + 1 * \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} p^1 q^3 + 2 * \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} p^2 q^2 + 3 * \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} p^3 q^1 + 4 * \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} p^4 q^0$$

$$= 0 + 1 * 4 * p^1 q^3 + 2 * 6 * p^2 q^2 + 3 * 4 * p^3 q^1 + 4 * p^4 q^0$$

$$= 4\,p\,(1-p)^3 + 12\,p^2\,(1-p)^2 + 12\,p^3\,(1-p) + 4\,p^4$$

$$\begin{aligned} = 4\,p\,(1-p)\,(1-p)^2 \\ + 12\,p^2\,(1-p)^2 \\ + 12\,p^3\,(1-p) \\ + 4\,p^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = 4\,p\,(1- 2p + p^2 - p + 2p^2 - p^3\,) \\ + 12\,p^2 - 24\,p^3 + 12\,p^4 \\ + 12\,p^3 - 12\,p^4 \\ + 4\,p^4 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= 4p \quad & - 12p + 12p^2 - 4p^4\,) \\
& + 12p^2 - 24p^3 + 12p^4 \\
& \qquad\qquad + 12p^3 - 12p^4 \\
& \qquad\qquad\qquad\quad + 4p^4
\end{aligned}
$$

$$= \underline{\underline{4p}} \quad \text{(q.e.d.)}$$