

(2-7) Implikation umformen

Zeigen Sie mittels einer Wahrheitstafel, daß die Implikation

$$P \rightarrow Q$$

zu dem Logik-Term

$$\neg P \vee Q$$

(*disjunktive Normalform*) äquivalent ist, d.h. daß gilt:

$$(*) \quad P \rightarrow Q \leftrightarrow \neg P \vee Q$$

(2-7) Lösungsskizze

Wir erfassen zunächst systematisch die möglichen paarweisen Belegungen von p und q in der Wahrheitstafel. Dadurch sind auch die Werte in Spalte (7) belegt.

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$\neg p$	\vee	q
0	0					0
0	1					1
1	0					0
1	1					1

Im ersten Schritt bestimmen wir die Wahrheitswerte von $p \rightarrow q$. Die Wahrheitswerte ergeben sich aus der Wertetabelle der Implikation (\rightarrow) und werden in Spalte (3) eingetragen. In der Spalte (3) steht nun der Wahrheitswert der linken Seite von (*).

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$\neg p$	\vee	q
0	0	1				0
0	1	1				1
1	0	0				0
1	1	1				1

Im zweiten Schritt bestimmen wir die Wahrheitswerte von $\neg p$. Diese ergeben sich aus der Umkehrung der Werte in Spalte (1) und werden in Spalte (5) eingetragen.

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$\neg p$	\vee	q
0	0	1		1		0
0	1	1		1		1
1	0	0		0		0
1	1	1		0		1

Im dritten Schritt bestimmen wir die Wahrheitswerte von $\neg p \vee q$. Die Wahrheitswerte ergeben sich aus der Wertetabelle der Disjunktion (\vee) und werden in Spalte (6) eingetragen. Spalte (6) ist dann auch der Wahrheitswert der rechten Seite von (*).

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$\neg p$	\vee	q
0	0	1		1	1	0
0	1	1		1	1	1
1	0	0		0	0	0
1	1	1		0	1	1

Abschließend vergleichen wir zeilenweise die Wahrheitswerte der linken Seite (Spalten (3)) mit der rechten Seite (Spalte(6)). Stimmen die Wahrheitswerte überein, tragen wir in der entsprechenden Zeile von (4) eine 1 ein. Ist der Wahrheitswert in allen Zeilen der Spalte (4) gleich 1, dann sind linke und rechte Seite von (*) äquivalent.

1	2	3	4	5	6	7
p	q	$p \rightarrow q$	\leftrightarrow	$\neg p$	\vee	q
0	0	1	1	1	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	0	1	1

Dies ist hier der Fall, also ist (*) bewiesen.