

1.3. Gebräuchliche Basen der Stellenwertsysteme

1.3.1. Historische und marginalisierte Stellenwertsysteme

In verschiedenen Kulturen und Lebensbereichen haben sich bis in die heutige Zeit Relikte früher weiter verbreiteter Stellenwertsysteme erhalten. Dazu zählen:

- Das *Vigesimalsystem* ("20er-System"). Das Vigesimalsystem verwendet die Basis *Zwanzig*.¹
- Das *Duodezimalsystem* ("12er-System"). Das Duodezimalsystem verwendet die Basis *Zwölf*. Dieses System liegt dem Rechnen mit *Dutzend* und *Gros* und dem angelsächsischen Maßsystem (z.B. 1 Shilling = 12 Pence) zu Grunde. Auch die Stundenzählung hat ihren Ursprung im Duodezimalsystem .
- Das *Sexagesimalsystem* ("60er-System"). Das Sexagesimalsystem der Babylonier ist ein Zahlensystem mit der Basis *Sechzig*, auf dem auch heute z.T. noch die Zeitrechnung basiert.

¹ Das Französische verwendet im Bereich der Zahlen zwischen 60 und 100 neben den (klassischen) Stufen *septante*, *octante* und *nonante* ein Vigesimalsystem. In diesem gilt z.B.

60	<i>soixante</i>	(6.0 (mit Punkt zur Trennung der Ziffern))
61	<i>soixante-et-un</i>	(6.1)
...		
69	<i>soixante-neuf</i>	(6.9)
70	<i>soixante-dix</i>	(6.10)
71	<i>soixante-et-onze</i>	(6.11)
...		
79	<i>soixante-dix-neuf</i>	(6.19)

Die nächste Schwelle ist dann *quatre-vingts* (=80). Die Zählung erfolgt dann weiter im 20er-System

81	<i>quatre-vingt-un</i>	(8.1)
...		
90	<i>quatre-vingt-onze</i>	(8.11)
...		
99	<i>quatre-vingt-dix-neuf</i>	(8.19)

1.3.2. Moderne Stellenwertsysteme

1.3.2.1. Das Dezimalsystem

Das am weitesten verbreitete Stellenwertsystem ist das *Dezimalsystem* ("10er-System"). Der Ursprung des dezimalen Stellenwertsystems ist Indien. Dort wurde auch die Ziffer 0 erfunden. Der persische Mathematiker *AL-CHWARIZMI* verwendete die *indischen* Ziffern in seinem Buch der Arithmetik bereits im 9. Jahrhundert.² Durch die Vermittlung arabischer Mathematiker gelangten das dezimale Stellenwertsystem und die nun *arabisch* genannten Ziffern im 10. Jahrhundert nach Europa, zunächst nach Kastilien, Katalonien und Italien.³ Das Stellenwertsystem verdrängte langsam die im christlichen Europa immer noch gebräuchlichen römischen Ziffern. Zunächst wurde es noch ohne die Ziffer 0 eingeführt, deren Funktion unverstanden blieb. Erst im 16. Jahrhundert konnte sich das dezimale Stellenwertsystem endgültig durchsetzen.⁴

1.3.2.1. Darstellung natürlicher Zahlen im Dezimalsystem

Das dezimale Stellenwertsystem ist entsprechend 1.1.2.1.2.3.(3) aufgebaut. Das dezimale Stellenwertsystem verwendet die Basis ist $b = 10$ und die Nennwerte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9. Eine Dezimalzahl Z_{10} ist demnach Zahl, der einer Folge der Form

$$(1) \quad Z_{10} = \sum_{i=n}^0 a_i \cdot 10^i = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_0 \cdot 10^0$$

² Vgl. Die Ausgabe von Boncompagni, B.: *Trattati d'aritmetica. I: Algoritmi de numero Indorum, II: Joannis Hispalensis liber Algorismi de pratica arismetrice*, Roma 1857.

³ (in Vorbereitung)

⁴ Eine herausragende Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang dem Arithmetikbuch des *LEONARDO VON PISA*, genannt *FIBONACCI* aus dem Jahre 1206. Vgl. Boncompagni, B.: *Il Liber Abaci di Leonardo Pisano*. Badia Fiorentina 73, Roma 1857

mit $a_i \in \{ 0, 1, \dots, 9 \}$ zugeordnet wird.⁵ Der Zahlenwert ergibt sich in (1) also durch Summierung der Reihe aller mit ihrem jeweiligen *Stellenwert* (*10er-Potenz*) multiplizierten Ziffernwerte.

1.3.2.2. Darstellung rationaler Zahlen im Dezimalsystem

$$\begin{aligned}
 (2) \quad Z_{10} &= \sum_{i=n}^{-m} a_i b^i \\
 &= a_n b^n + \dots + a_1 b^1 + a_0 b^0 + a_{-1} b^{-1} \dots + a_{-m} b^{-m}
 \end{aligned}$$

Beispiel:

- Im Dezimalsystem wird die Zahl *EinTausendElf* durch $[1011]_{10}$ entsprechend (2) durch folgende Reihe dargestellt:

$$1011_{10} = 1 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0$$

⁵ Es lässt sich zeigen, daß zu jeder natürlichen Zahl n eine Folge von Ziffern existiert, deren zugeordneter Wert n ist. Im Allgemeinen gibt es mehrere Folgen dieser Art. Es genügt, beliebig oft die Ziffer $\mathbf{0} = 0$ anzufügen (das heißt in der konventionellen Schreibweise (siehe 1.1.3.3.(2)) eine führende Null voranzustellen). Werden solche Folgen, die auf der Ziffer $\mathbf{0}$ enden (in der üblichen Schreibweise also Folgen mit führender $\mathbf{0}$) nicht zugelassen, kann man zeigen, daß diese Zuordnung eineindeutig ist (\rightarrow Satz 1.3.5.1. (S.17)). Zu jeder natürlichen Zahl n existiert dann genau eine Folge, deren zugeordneter Wert n ist. Entgegen dieser Vorschrift wird der Zahl 0 nun nicht die leere Folge, sondern die Folge, die aus genau einem Folgenglied besteht, nämlich der Ziffer, der der Wert 0 zugeordnet wird (üblicherweise also $\mathbf{0}$) zugeordnet. Dadurch ist auch die Zahl 0 darstellbar.

- Die Dezimalzahl $9321,27_{10}$ entspricht im Dezimalsystem folgender endlichen Potenzreihe:

$$9321,27_{10} = 9 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}$$

- Die rationale Zahl $2467,56_{10}$ wird im Dezimalsystem durch eine endliche Reihe wie folgt dargestellt:

$$2467,56_{10} = 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 6 \cdot 10^{-2}$$

- Wenn der Nenner q von $z \in \mathbb{Q}$ zur Basis b teilerfremde Primfaktoren besitzt, dann bricht die Division nicht ab, sondern liefert eine sich wiederholende Folge von Ziffern. Diese sich wiederholende Folge heißt *Periode* und wird insgesamt durch Überstreichen bezeichnet, z. B. gilt für die rationale Zahl *FünfSechstel*:

$$5/6 = 0 \cdot 10^0 + 8 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 3 \cdot 10^{-4} + \dots = 0,8\bar{3}_{10} \quad \blacksquare$$

1.3.2.3. Eindeutigkeit der Zahldarstellung

Die Zuordnung von Ziffernfolgen zu rationalen Zahlen ist grundsätzlich nicht eindeutig. So bezeichnen die Ziffernfolgen 1_{10} , $1,0_{10}$ und $0,\bar{9}_{10}$ im Dezimalsystem dieselbe rationale Zahl 1. Während die Gleichwertigkeit von

$$1_{10} = 1 \cdot 10^0$$

und

$$1,0_{10} = 1 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^{-1}$$

leicht einzusehen ist, ergibt sich der Wert

$$1 = 0,\bar{9}_{10} = \sum_{i=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-i}$$

erst durch die Bestimmung des Grenzwertes der obenstehenden unendlichen Reihe.

1.3.3. Das Dualsystem⁶

Das Dualsystem ("2er-System") ist ein Stellenwertsystem mit der Basis *Zwei*.⁷ Die *dyadische* (2-adische) Zahlendarstellung ist auf Grund ihrer Bedeutung in der Digitaltechnik das neben dem dezimalen Stellenwertsystem wichtigste Zahlensystem.

Das Dualsystem wurde erstmals von dem deutschen Mathematiker und Philosophen *GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ* zu Beginn des 18. Jahrhunderts in der Abhandlung *Explication de l'Arithmétique Binaire*⁸ vollständig beschrieben. Im Jahre 1854 beschrieb der englische Mathematiker *GEORGE BOOLE* ein zweiwertiges logisches System, das als *Boolesche Algebra* Verbreitung fand. Sein logisches System bildet eine mathematische Grundlage der Realisierung von elektrischen Schaltkreisen, die eine binäre Arithmetik im Dualsystem implementiert. 1938 entwarf der amerikanische Mathematiker *CLAUDE SHANNON* erstmals die Realisierung der *Booleschen Algebra* und der binären Arithmetik in elektronischen Relais und Schaltern. *SHANNONS* Arbeit *A Symbolic Analysis of Relay and Switching Circuits*⁹ begründete die Konstruktion digitaler Schaltkreise.

1937 vollendete der amerikanische Wissenschaftler *GEORGE STIBITZ* seinen relaisgestützten Rechner *Modell K*, der die Addition im Dualsystem beherrschte. 1941 konstruierte der deutsche Ingenieur *KONRAD ZUSE* den ersten programmierbaren Binärrechner: den *Z3*.

⁶ lat. dualis "zwei enthaltend".

⁷ Die Zahlen in der Digitaltechnik können nicht immer eindeutig einem Zahlensystem zugeordnet werden. So könnte die Zahl 100 dem hexadezimalen, dem dualen und dem dezimalen Zahlensystem angehörig sein. In allen Zahlensystemen hätte die Zahl 100 eine andere Wertigkeit. Deshalb werden Zahlen in der Digitaltechnik mit einem Index versehen. Dezimale Zahlen werden mit einem kleinen d markiert (z. B. 100d), hexadezimale Zahlen mit einem kleinen h markiert (z. B. 100h). Duale Zahlen werden mit einem kleinen b markiert (z. B. 100b).

⁸ (in Vorbereitung)

⁹ (in Vorbereitung)

1.3.3.1. Darstellung natürlicher Zahlen

Eine Dualzahl wird durch die Ziffern 0 und 1 dargestellt. Die Ziffern werden wie im gewöhnlich verwendeten Dezimalsystem ohne Trennzeichen hintereinander geschrieben, ihr Stellenwert entspricht allerdings der der Stelle zugeordneten Zweierpotenz und nicht der Zehnerpotenz. Es wird also die höchstwertige Stelle mit dem Wert a_n links und die niederwertigeren Stellen mit den Werten a_{n-1} bis a_0 in absteigender Reihenfolge rechts davon notiert.

Das duale Stellenwertsystem ist entsprechend 1.1.2.1.2.3 (3) aufgebaut. In der 2-adischen (*dyadischen*) Darstellung wird eine natürliche Zahl $n \in \mathbf{N}$ durch eine (endliche) Folge

$$(3) \quad \langle a_n \rangle = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

von Ziffern $a_i \in \{ 0, 1 \}$ dargestellt. Die traditionelle Darstellungskonvention folgt der des Dezimalsystems, so daß der Folge (3) der folgende von rechts nach links geordnete Ausdruck zugeordnet ist:

$$(4) \quad a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$$

Das duale Stellenwertsystem verwendet die Basis $b = 2$ und die Nennwerte 0 und 1. Eine Dualzahl ist demnach eine Zahl, der eine Reihe der Form

$$(5) \quad Z_2 = \sum_{i=n}^0 a_i \cdot 2^i = a_n \cdot 2^n + a_{n-1} \cdot 2^{n-1} + \dots + a_0 \cdot 2^0$$

mit $a_i \in \{ 0, 1 \}$ zugeordnet wird.¹⁰ Der Zahlenwert Z ergibt sich in (5) also durch Summierung der Reihe aller mit ihrem jeweiligen *Stellenwert (2er-Potenz)* multiplizierten Ziffernwerte.

Beispiele¹¹

- Die (dyadische) Ziffernfolge $[1101]_2$ stellt nicht wie im Dezimalsystem die Zahl *EinTausendEinHundertEins* dar, sondern die Zahl *Dreizehn*. Ihr Wert ergibt sich im Dualsystem durch

$$\begin{aligned} 1101_2 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\ &= 8_{10} + 4_{10} + 0_{10} + 1_{10} \\ &= 13_{10} \end{aligned}$$

- Der Wert der Ziffernfolge $[1011]_2$ ergibt sich im Dualsystem durch

¹⁰ In der Fachliteratur zur elektronischen Datenverarbeitung werden alternativ auch die Symbole L (engl. *Low*) und H (engl. *High*) an Stelle von 0 und 1 verwendet. Die Dualzahl *Dreizehn* wird dann wie folgt geschrieben:

HLHH

oder mit L für 1 auch als

LOLL

¹¹ Die Klammerung der Resultate gibt in Verbindung mit den Indizes 2 beziehungsweise 10 die Basis des verwendeten Stellenwertsystems an. Die mathematische Literatur verzichtet häufig auf die eckigen Klammern, gelegentlich findet sich der Index in runden Klammern. Somit sind verschiedene gleichwertige Darstellungsformen, z.B. der Zahl *Dreizehn*. im Dualsystem möglich:

$[1101]_2$ oder
 1101_2 oder
 $1101_{(2)}$

$$\begin{aligned}
 1011_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \\
 &= 8_{10} + 0_{10} + 2_{10} + 1_{10} = 11_{10} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

1.3.3.2. Darstellung rationaler Zahlen¹²

Die Darstellung von rationalen Zahlen ist analog zu 1.1.2.1.2.6 (5), (6) aufgebaut. Nach einem trennenden Komma stehen die Stellen a_{-1} bis a_{-n} , die den gebrochenen Anteil der Zahl darstellen: eine rationale Zahl $Z \in \mathbb{Q}$ wird in der 2-adischen Darstellung durch eine (endliche) Folge der Form

$$(6) \quad \langle a_n \rangle = a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

von Ziffern $a_i \in \{0, 1\}$, mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ dargestellt. Die traditionelle Darstellungskonvention ist allerdings der folgende von rechts nach links geordnete Ausdruck:

$$(7) \quad a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-m}$$

Der Wert der Dualzahl ergibt sich durch Addition dieser Ziffern, welche vorher jeweils mit ihrem Stellenwert 2^i multipliziert werden: eine rationale Zahl wird im Dualsystem also dargestellt durch eine Reihe der Form

$$(8) \quad Z_2 = \sum_{i=n}^{-m} a_i \cdot 2^i = a_n \cdot 2^n + \dots + a_0 \cdot 2^0 + a_{-1} \cdot 2^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot 2^{-m}$$

mit $a_i \in \{0, 1\}$. Der Zahlenwert von Z ergibt sich in (8) also durch Summierung der Reihe aller mit ihrem jeweiligen Stellenwert (2er-Potenz) multiplizierten Ziffernwerte.

¹² (lat. *dualis* = zwei enthaltend)

Beispiele

- Die (dyadische) Ziffernfolge $1101,01_2$ stellt nicht wie im Dezimalsystem die Zahl *EinTausendEinHundertEinsKommaNullEins*, sondern die Zahl *DreizehnKommaZweiFünf* dar. Ihr Wert ergibt sich im Dualsystem durch

$$\begin{aligned} 1101,01_2 &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 8_{10} + 4_{10} + 0_{10} + 1_{10} + 0_{10} + 0,25_{10} \\ &= 13,25_{10} \end{aligned}$$

- Die (dyadische) Ziffernfolge $1,11_2$ stellt nicht wie im Dezimalsystem die Zahl *EinsKommaEinsEins*, sondern die Zahl *EinsKommaSiebenFünf* dar. Ihr Wert ergibt sich im Dualsystem durch

$$\begin{aligned} 1,11_2 &= 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} \\ &= 1_{10} + 0,5_{10} + 0,25_{10} \\ &= 1,75_{10} \end{aligned}$$

■

1.3.3.3. Arithmetische Operationen im Dualsystem

Analog zu den arithmetischen Operationen im Dezimalsystem lassen sich mit Dualzahlen die gängigen arithmetischen Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division durchführen.¹³

1.3.3.3.1. Addition

Die Addition im Dualsystem soll anhand der Addition der Zahlen $A = 0011_2$ und $B = 0111_2$ exemplarisch dargestellt werden. Die Binärziffern von A und B werden von rechts nach links positionsweise abgearbeitet und in jedem Zwischenschritt eine Ergebnisziffer sowie einen Übertrag erzeugt. Zunächst werden die beiden Bits a_0, b_0 in der Spalte 2^0 addiert. An der Stelle 2^0 werden $a_0 = 1$ und $b_0 = 1$ addiert. Das

¹³ Tatsächlich sind die entsprechenden Algorithmen einfacher und lassen sich effizient mit logischen Schaltungen umsetzen.

Ergebnis ist die Basis des Dualsystems. Daher wird in der Spalte 2^0 in der Zeile Ergebnis eine 0 und in der Spalte 2^1 in der Zeile Übertrag eine 1 eingetragen.¹⁴

Dann werden Koeffizienten und Übertrag in der Spalte 2^1 addiert. An der Stelle 2^1 werden die Koeffizienten $a_1 = 1$ und $b_1 = 1$ und der Übertrag von 2^0 (hier 1) addiert. Das Ergebnis übersteigt Basis des Dualsystems um 1. Daher wird in der Zeile Ergebnis der Spalte 2^1 eine 1 und in der Spalte 2^2 in der Zeile Übertrag eine 1 eingetragen.¹⁵

Dann werden Koeffizienten und Übertrag in der Spalte 2^2 addiert. An der Stelle 2^2 werden die Koeffizienten $a_2 = 0$ und $b_2 = 1$ und der Übertrag von 2^1 (hier 1) addiert. Das Ergebnis ist gleich der Basis des Dualsystems. Daher wird in die Zeile Ergebnis der Spalte 2^2 eine 0 und in der Spalte 2^3 in der Zeile Übertrag eine 1 eingetragen.

Zuletzt werden Koeffizienten und Übertrag in der Spalte 2^3 addiert. An der Stelle 2^3 werden die Koeffizienten $a_3 = 0$ und $b_3 = 0$ und der Übertrag von 2^2 (hier 1) addiert. Das Ergebnis ist 1. Daher wird in der Spalte 2^3 eine 1 in der Zeile Ergebnis eingetragen. Es gibt keinen Übertrag. Das Verfahren ist in folgender Tabelle zusammenfassend dargestellt:

	2^3	2^2	2^1	2^0	
A	0	0	1	1	$=3_{10}$
B	0	1	1	1	$=7_{10}$
Übertrag	1	1	1		
Ergebnis	1	0	1	0	$=10_{10}$

Tab. I: Addition im Dualsystem

¹⁴ Da an dieser Position kein Übertrag verarbeitet werden muß, kann diese Operation von einem Halbaddierer ausgeführt werden.

¹⁵ Da an dieser Position zwei Dualziffern und ein Übertrag verarbeitet werden muß, kann diese Operation nur von einem Volladdierer ausgeführt werden.

1.3.3.3.2. Subtraktion

Die Subtraktion im Dualsystem soll anhand von $A = 101_2$ und $B = 011_2$ exemplarisch dargestellt werden. Die Binärziffern der Dualzahlen werden von rechts nach links positionsweise abgearbeitet und in jedem Zwischenschritt eine Ergebnisziffer sowie ein Übertrag erzeugt.¹⁶ Zunächst werden die beiden Bits a_0, b_0 in der Spalte 2^0 subtrahiert. An der Stelle 2^0 wird $b_0 = 1$ von $a_0 = 1$ subtrahiert. Das Ergebnis ist 0 und wird in der Zeile 2^0 in der Spalte Ergebnis eingetragen.

Dann werden die Koeffizienten und der Übertrag in der Spalte 2^1 verrechnet. An der Stelle 2^1 werden vom Koeffizienten $a_1 = 0$ der Koeffizient $b_1 = 1$ und der Übertrag von 2^0 (hier 0) subtrahiert. Da die Summe aus b_1 plus Übertrag größer als a_1 ist, wird in der Spalte 2^1 in der Zeile Ergebnis eine 1 und in der Zeile Übertrag in der Spalte 2^2 ebenfalls eine 1 eingetragen.

Zuletzt werden Koeffizienten und der Übertrag in der Spalte 2^2 verrechnet. An der Stelle 2^2 werden vom Koeffizienten $a_3 = 1$ der Koeffizient $b_3 = 0$ und der Übertrag von 2^1 (hier 1) subtrahiert. Das Ergebnis ist 0 und wird in die entsprechende Zeile der Spalte 2^2 eingetragen. Es gibt keinen Übertrag

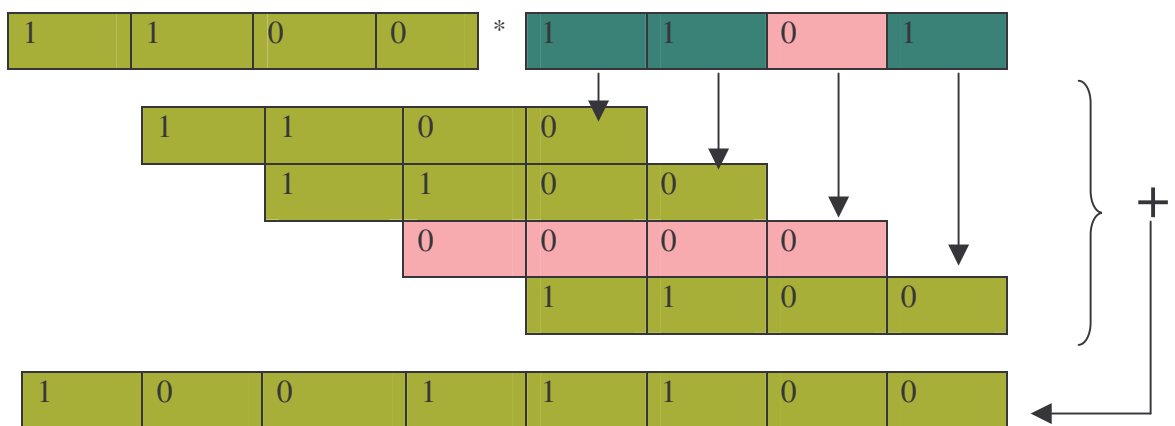
	2^2	2^1	2^0	
A	1	0	1	$=5_{10}$
B	0	1	1	$=3_{10}$
Übertrag	1	0		
Ergebnis	0	1	0	$=2_{10}$

Tab. II: Subtraktion im Dualsystem

¹⁶ Das Verfahren funktioniert (wie auch im Dezimalsystem) nicht, wenn der Minuend kleiner ist als der Subtrahend.

1.3.3.3. Multiplikation

Die Multiplikation im Dualsystem entspricht der Multiplikation im Dezimalsystem. Sie ist im Dualsystem sogar einfacher, da bloß die beiden Faktoren 0 und 1 als Ziffern, d.h. als Faktoren auftreten. Als Beispiel werden die Dualzahlen 1100 und 1101 multipliziert. Das Verfahren ist in folgender Tabelle schematisch dargestellt:¹⁷



1.3.3.4. Division

(in Vorbereitung)

¹⁷ Die hier dargestellte Multiplikation entspricht der (dezimalen) Multiplikation $12 * 13 = 156$.

1.3.4. Das Hexadezimalsystem¹⁸

Für Aufbau und Notation des hexadezimalen Systems gelten analoge Überlegungen zu 1.1.2.1.2.3 und 1.3.3.1.

1.3.4.1. Darstellung natürlicher Zahlen

Eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ wird in der 16-adischen Darstellung durch eine (endliche) Folge

$$(9) \quad \langle a_n \rangle = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

von Ziffern $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ ¹⁹ dargestellt. Die traditionelle Darstellungskonvention ist allerdings der folgende von rechts nach links geordnete Ausdruck:

$$(10) \quad a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0$$

Das hexadezimale Stellenwertsystem verwendet die Basis $b = 16$ und die Nennwerte 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E und F. Eine hexadezimale Zahl ist demnach Zahl, der eine Reihe der Form

$$(11) \quad Z_{16} = \sum_{i=n}^0 a_i \cdot 16^i = a_n \cdot 16^n + a_{n-1} \cdot 16^{n-1} + \dots + a_0 \cdot 16^0$$

¹⁸ griech. hexa- „sechs-“

¹⁹ Das Hexadezimalsystem (Sedezimalsystem) mit seinen sechzehn Ziffern ist ein alphanumerisches Mischsystem und seit den 1950er Jahren Standardrepräsentation für hexadezimale Zahlen. Dieses Ziffernsystem ist in Programmcodes mehrdeutig: der Ausdruck „AB12“ kann die hexadezimale Zahl $[AB12]_{16}$ oder eine Variable mit Namen AB12 beschreiben und benötigt daher grundsätzlich klärende Prä- oder Suffixe (z. B. Präfix 0x).

mit $a_i \in \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F \}$ zugeordnet wird. Der Zahlenwert Z ergibt sich also in (11) aus der Summierung aller Produkte aus Ziffernwerten und ihren jeweiligen *Stellenwerten*.

Beispiele

- Die (hexadezimale) Ziffernfolge 101_{16} stellt nicht wie im Dezimalsystem die Zahl *EinHundertEins* dar, sondern die Zahl *ZweiHundertSiebenundfünfzig*. Ihr Wert ergibt sich im Hexadezimalsystem durch

$$\begin{aligned} 101_{16} &= 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 \\ &= 256_{10} + 0_{10} + 1_{10} \\ &= 257_{10} \end{aligned}$$

- Die (hexadezimale) Ziffernfolge 1011_{16} stellt nicht wie im Dezimalsystem die Zahl *EinTausendElf* dar, sondern die Zahl *FünfTausendDreizehn*. Ihr Wert ergibt sich im Hexadezimalsystem durch

$$\begin{aligned} 1011_{16} &= 1 \cdot 16^3 + 0 \cdot 16^2 + 1 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 \\ &= 4096_{10} + 1 \cdot 16_{10} + 1_{10} \\ &= 5013_{10} \end{aligned}$$

- Die (hexadezimale) Ziffernfolge $AFFE_{16}$ wird wie folgt in das Dezimalsystem umgerechnet:

$$\begin{aligned} AFFE_{16} &= A \cdot 16^3 + F \cdot 16^2 + F \cdot 16^1 + E \cdot 16^0 \\ &= 10_{10} \cdot 16^3 + 15_{10} \cdot 16^2 + 15_{10} \cdot 16^1 + 14_{10} \cdot 16^0 \\ &= 40960_{10} + 3840_{10} + 240_{10} + 14_{10} \\ &= 45054_{10} \end{aligned}$$

1.3.4.2. Darstellung von rationalen oder reellen Zahlen

Zur Darstellung von rationalen Zahlen folgen entsprechend 1.1.2.1.2.6.(5), (6) nach einem trennenden Komma die Stellen a_{-1} bis a_{-n} , die den gebrochenen Anteil der Zahl darstellen. Eine rationale Zahl $z \in \mathbb{Q}$ wird in der 16-adischen Darstellung durch eine (endliche) Folge

$$\langle a_n \rangle = a_{-m}, a_{-m+1}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$$

von Ziffern $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ dargestellt. Die traditionelle Darstellungskonvention ist allerdings der folgende von rechts nach links geordnete Ausdruck:

$$a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_0, a_{-1} \dots a_{-m}$$

Der Wert der Hexadezimalzahl z ergibt sich durch Addition dieser Ziffern, welche vorher jeweils mit ihrem Stellenwert 16^i multipliziert werden. Eine rationale Zahl in hexadezimaler Darstellung ist demnach Zahl, der eine Reihe der Form

$$(12) \quad z_{16} = \sum_{i=n}^{-m} a_i \cdot 16^i$$

$$= a_n \cdot 16^n + \dots + a_0 \cdot 16^0 + a_{-1} \cdot 16^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot 16^{-m}$$

mit $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$ zugeordnet wird. Der Zahlenwert ergibt sich also in (12) aus der Summierung aller Produkte aus Ziffernwerten und ihren jeweiligen *Stellenwerten*.

Beispiele

- Die hexadezimale Ziffernfolge $101,01_{16}$ stellt nicht wie im Dezimalsystem die Zahl *EinHundertEinsKommaNullEins*, sondern die Zahl *ZweiHundertSiebenundfünfzigKommaNullNullDreiNeunNullSechsZweiFünf* dar. Ihr Wert ergibt sich im Hexadezimalsystem durch

$$\begin{aligned}
 101,01_{16} &= 1 \cdot 16^2 + 0 \cdot 16^1 + 1 \cdot 16^0 + 0 \cdot 16^{-1} + 1 \cdot 16^{-2} \\
 &= 256_{10} + 0_{10} + 1_{10} + 0_{10} + 0,00390625_{10} \\
 &= 257,00390625_{10}
 \end{aligned}$$

- Die (hexadezimale) Ziffernfolge $1,11_{16}$ stellt nicht wie im Dezimalsystem die Zahl *EinsKommaEinsEins*, sondern die Zahl *EinsKommaNullSechsSechsVierNullSechsZweiFünf* dar. Ihr Wert ergibt sich im Hexadezimalsystem durch

$$\begin{aligned}
 1,11_{16} &= 1 \cdot 16^0 + 1 \cdot 16^{-1} + 1 \cdot 16^{-2} \\
 &= 1_{10} + 0,0625_{10} + 0,00390625_{10} \\
 &= 1,06640625_{10} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

1.3.4.3. Arithmetische Operationen im Hexadezimalsystem

(in Vorbereitung)

1.3.5. Zahlbasiswechsel

Neben dem Dezimalsystem werden in der Theorie und in der Praxis noch Stellenwertsysteme mit anderen Basen verwendet. So werden Zahlen in der Informationstechnik im Dualsystem dargestellt, da dieses sich vorzugsweise zur internen Verarbeitung durch elektronische Schaltungen eignet. Bei der Ausgestaltung des Benutzerdialogs dagegen zieht man ein System vor, das für den Nutzer leichter lesbar ist, da sich durch die kleine Basis der Nachteil ergibt, daß Dualzahlen im Verhältnis zu Dezimalzahlen relativ lang und leicht unüberschaubar werden. Dieses Motiv hat zur Verbreitung auch des Hexadezimalsystems beigetragen. Da dessen Basis eine Potenz von 2 ist, ist es - wie in 1.3.5.3. gezeigt wird - besonders einfach, Dualzahlen in Hexadezimalzahlen umzurechnen. Dazu werden je vier Stellen der Dualzahl durch eine Hexadezimalstelle ersetzt. Dies verringert die Länge der dargestellten Zahlen um den Faktor vier. So ergibt sich die Notwendigkeit, für die Darstellung einer Zahl von einem b -adischen Zahlensystem, dem *Quellsystem*, in ein anderes b -adisches Zahlensystem, das *Zielsystem*, zu wechseln. Dieser Vorgang wird als *Zahlbasiswechsel* bezeichnet.

1.3.5.1. Satz

Die b -adische Darstellung der Form 1.1.2.1.2.3.(3) einer natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ über der Menge (dem Ziffervorrat) $S_b = \{0, \dots, b-1\}$ ist eindeutig.²⁰

1.3.5.2. Folgerung

Sei also $n \in \mathbb{N}$ mit $a_i \in S_r$ über $S_r = \{0, \dots, r-1\}$ eindeutig durch

$$(13) \quad n = Z_r \quad = \quad \sum_{i=0}^k a_i \cdot r^i$$

dargestellt und ebenfalls mit $b_j \in S_q$ über $S_q = \{0, \dots, q-1\}$ eindeutig durch

²⁰ Vgl. Bundschuh, Peter: Einführung in die Zahlentheorie, Berlin 1992, S. 200 ff. Vgl. auch 1.1.2.1.2.3.Anm17.

$$(14) \quad n = Z_q = \sum_{j=0}^m b_j \cdot q^j$$

dargestellt, dann läßt sich zeigen, daß (13) und (14) gleichwertig sind²¹, d.h. es existieren $k, m \in \mathbf{N}$, so daß gilt:

$$(15) \quad Z_r = Z_q \\ \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k a_i \cdot r^i = \sum_{j=0}^m b_j \cdot q^j$$

1.3.5.3. Umrechnung vom Dual- ins Hexadezimalsystem

Die Gleichung (15) läßt sich exemplarisch besonders leicht anhand der Konvertierung von hexadezimalen Zahlen und dualen Zahlen zeigen, da 4 Stellen einer binären Zahl einer Stelle einer hexadezimalen Zahl entsprechen.

Der Dezimalzahl 227_{10} entspricht die Dualzahl

$$\sum a_i \cdot 2^i \text{ mit } i = 0, 1, \dots, 7$$

und mit

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 = 1, a_6 = 1, a_7 = 1.$$

Dann existiert auch eine hexadezimale Darstellung von 227_{10} der Form

$$\sum b_j 16^j \text{ mit } j = 0,1$$

mit

²¹ Vgl. Bundschuh, Peter: op.cit., Berlin 1992, S. 200-201

$$b_0 = \sum a_i * 2^i \quad \text{mit } i = 0, 1, 2, 3$$

$$b_1 = \sum a_i * 2^{i \bmod 4} \quad \text{mit } i = 4, 5, 6, 7.$$

Hier gilt insbesondere

$$b_0 = a_0 * 2^0 + a_1 * 2^1 + a_2 * 2^2 + a_3 * 2^3$$

$$= 1 * 1 + 1 * 2 + 0 * 4 + 0 * 8$$

$$= 3$$

$$b_1 = a_4 * 2^{4 \bmod 4} + a_5 * 2^{5 \bmod 4} + a_6 * 2^{6 \bmod 4} + a_7 * 2^{7 \bmod 4}$$

$$= 0 * 2^0 + 1 * 2^1 + 1 * 2^2 + 1 * 2^3$$

$$= 0 * 1 + 1 * 2 + 1 * 4 + 1 * 8$$

$$= 14_{10}$$

$$= E_{16}$$

Die der Dualzahl $[11100011]_2$ entsprechende hexadezimale Zahl ist also $[E3]_{16}$. Es gilt also

$$[E3]_{16} = 14 * 16^1 + 3 * 16^0 = 227_{10}$$

Also gilt mit den oben berechneten Koeffizienten a_i, b_j analog zu (15) die Gleichung

$$(15') \quad \sum a_i * 2^i = \sum b_j * 16^j$$

erfüllen. Dies war zu zeigen. ■

1.3.5.4. Umrechnen vom Dualsystem ins Dezimalsystem

Die Umrechnung von Dualzahlen in Dezimalzahlen ist von besonderer Bedeutung und bietet keine besonderen Schwierigkeiten. Dies zeigt folgendes

Beispiel

Um eine Dualzahl in die entsprechende Dezimalzahl umzurechnen, werden alle Ziffern jeweils mit ihrem Stellenwert (entsprechende Zweierpotenz) multipliziert und dann addiert.

$$\begin{aligned}1010_2 &= 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 \\ &= 8_{10} + 0_{10} + 2_{10} + 0_{10} \\ &= 10_{10}\end{aligned}$$
■

1.3.5.5. Umrechnung von Dezimalzahlen in Dualzahlen

Es gibt mehrere Möglichkeiten der Umrechnung von Dezimalzahlen in Dualzahlen, u.a. die auch *Modulo-Methode* genannte *Divisionsmethode* und das im Folgenden als *Subtraktionsmethode* bezeichnete Verfahren der sukzessiven Subtraktion von 2er-Potenzen.

1.3.5.5.1. Divisionsmethode

Im Folgenden wird die Divisionsmethode am Beispiel von $z = 41_{(10)}$ beschrieben. Zur Umrechnung von Dezimalzahlen in Dualzahlen bedient man sich einer Tabelle. Bei der Umwandlung wird die Dezimalzahl sukzessive durch 2 dividiert. Der Rest der Division ergibt die entsprechende Dualziffer. Ergibt die Division den Rest 1, so wird eine 1 in die Spalte 'Rest' gesetzt. Andernfalls kommt in die Spalte 'Rest' der Eintrag 0.

Dividend	/Divisor	=	Faktor	Rest
41	/2	=	20	1
20	/2	=	10	0
10	/2	=	5	0
5	/2	=	2	1
2	/2	=	1	0
1	/2	=	1	1

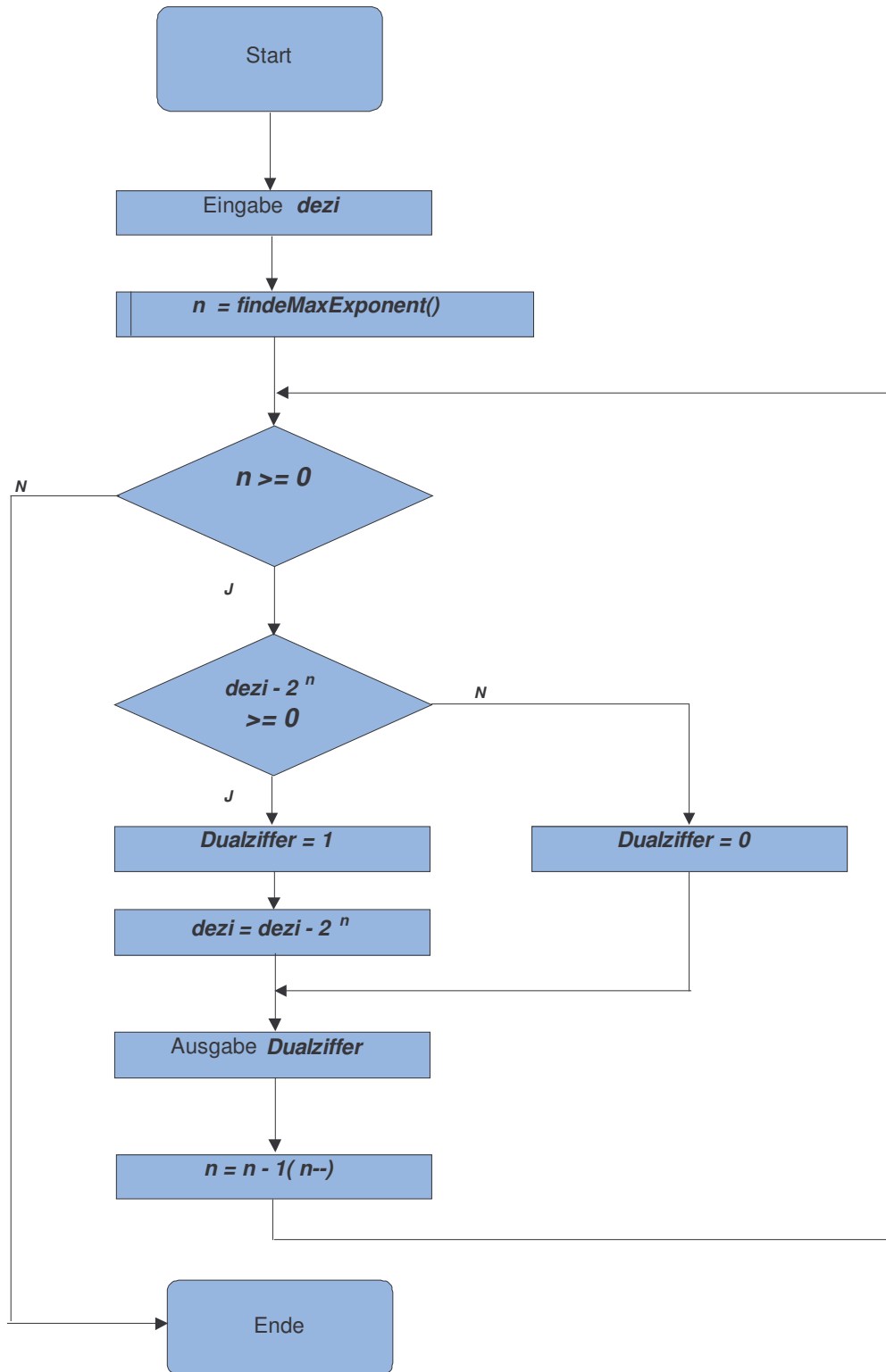
Die 41_{10} entsprechende Dualzahl ergibt sich durch Notation der errechneten Reste von oben nach unten zu: $101001_{(2)}$. Eine weitere Variante, Dezimalzahlen in Dualzahlen umzurechnen, basiert auf der sukzessiven Subtraktion aller 2er-Potenzen.

1.5.3.5.2. Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen durch Subtraktion von 2er-Potenzen

Zur Umwandlung von Dezimalzahlen in Dualzahlen bedient man sich ebenfalls einer Tabelle. Dabei wird die jeweils höchstmögliche 2er-Potenz vom verbleibenden Dezimalwert subtrahiert. Die erfolgreiche Subtraktion einer 2er-Potenz führt zum Eintrag einer 1 in die entsprechende Spalte. Ansonsten erhält die Spalte an der entsprechenden Position den Wert 0.

1.5.3.5.2.1. Algorithmus

Der Algorithmus, der die Dualziffern von links nach rechts nach der Subtraktionsmethode liefert, läßt sich durch folgendes Flußdiagramm darstellen.



Beispiel

Umrechnung der Dezimalzahl 915_{10} in eine Dualzahl nach der Subtraktionsmethode:

Dividend	2er-Potenz	abziehbar
915		
-512	2^9	1
403		
-256	2^8	1
147		
-128	2^7	1
19		
-64	2^6	0
19		
-32	2^5	0
19		
-16	2^4	1
3		
-8	2^3	0
3		
-4	2^2	0
3		
-2	2^1	1
1		
-1	2^0	1
0		

Die 915_{10} entsprechende Dualzahl ergibt sich durch Notation der errechneten Koeffizienten von unten nach oben zu: **1110010011_2** .

■