Grenzwertsätze II

Näherung der Poissonverteilung durch die Binomialverteilung

Auf Grund hoher Parameter ist es häufig praktisch nicht möglich, die Werte der Binomialverteilung zu berechnen. Wenn der Parameter ***k*** sehr klein ist, kann man die Binomialverteilung allerdings näherungsweise mittels der Poissonverteilung berechnen.

Beispiel: Massenanfertigung mit Qualitätskontrolle (9.7A)

Wir demonstrieren nun die Näherung der Binomialverteilung (im Folgenden als ***Binom*** abgekürzt) durch die Poissonverteilung (im Folgenden als ***Poisson*** abgekürzt) am Beispiel der Aufgabe 9.7A.

Da der Ausschußanteil p bekannt ist und der Stichprobenumfang n ist, läßt sich der für den Einsatz der Poissonverteilung notwendige Durchschnittswert λ (d.h. der Erwartungswert) berechnen und es gilt

$$\lambda = n * p \,.$$

Wir betrachten drei Fälle:

(1) p = 5,0 % ; n = 100
(2) p = 0,1 % ; n = 100
(3) p = 0,01 % ; n = 100

Wenn die Zahl der k der Erfolge[1] gegenüber n klein ist, können wir die Poissonverteilung anwenden.

Für (1) gilt:

$$\lambda = 5{,}0$$

Dabei gilt für die Summe der absoluten Abweichungen:

$$|\ \textbf{\textit{Poisson - Binom}}\ | \quad < 1{,}83\ \textit{Prozentpunkte}$$

Für (2) gilt:

$$\lambda = 0{,}1$$

Dabei gilt für die Summe der absoluten Abweichungen:

$$|\ \textbf{\textit{Poisson - Binom}}\ | \quad < 0{,}0173\ \textit{Prozentpunkte}$$

[1] Bezüglich der Anwendbarkeit der Binomialverteilung vgl. „***Grenzwertsätze I***“.

Für (3) gilt:

$\lambda = 0{,}01$

Dabei gilt für die Summe der absoluten Abweichungen:

$\mid$ ***Poisson - Binom*** $\mid$ $< 0{,}0002$ *Prozentpunkte*

Für p = 0,001% ist die Differenz | ***Poisson – Binom*** | kleiner als *0,000002 Prozentpunkte*. Wird p noch kleiner, dann geht die Differenz | ***Poisson – Binom*** | gegen Null.

Ergebnis

Diese näherungsweise Berechnung kann man sich bei kleinen Stichproben aus großen Grundgesamtheiten zu Nutze machen. Dies ist z.B. bei der Qualitätskontrolle der Fall. Wenn das durchschnittliche Eintreten eines Ereignisses bekannt und die Anzahl der Erfolge gegenüber dem Stichprobenumfang sehr klein ist, d.h. ***k << n*** gilt, dann kann man an Stelle der Binomialverteilung die einfacher zu berechnende Poissonverteilung einsetzen.

Grenzwertsatz (vereinfacht)[2]

Bezeichne n den Umfang der Stichprobe S, k die Anzahl der Erfolge in S, p sei die Erfolgswahrscheinlichkeit. Ferner sei k << n. Dann gilt mit hinreichend[3] *kleinem* $\lambda = n\,p$

$$\mathbf{lim}\; b\,(\,k;\, p;\, n\,) = ps_{\lambda}(\,k\,)$$

---

2 *b (Erfolge in S; Erfolgswahrscheinlichkeit; Anzahl der Versuche)* bezeichne die Dichtefunktion der Binomialverteilung.

ps_{λ} *(Erfolge in S)* bezeichne die Dichtefunktion der Poissonverteilung mit dem Erwartungswert λ.

3 Es gilt (vgl. Dürr/Mayer *Wahrscheinlichkeitsrechnung und schließende Statistik*, München 1987, S. 93):

(1) $\lambda = n\,p \leq 10$ und

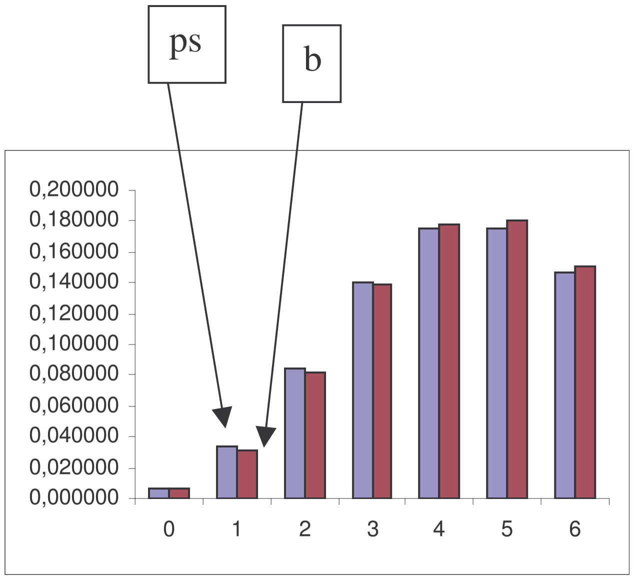
(2) $n \geq 1500\,p$

$\Leftrightarrow \quad p \leq {}^{n}/_{1500}$

Grenzwerte II

9.7A (Fall 1)

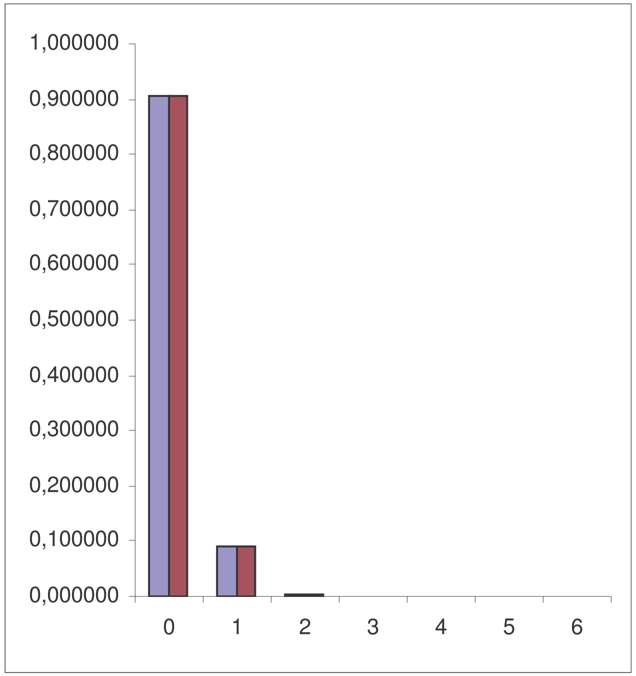
n=	100
p=	5%
λ=	5,0



| ***Poisson–Binom*** | < 1,83 Prozentpunkte

9.7A (Fall 2)

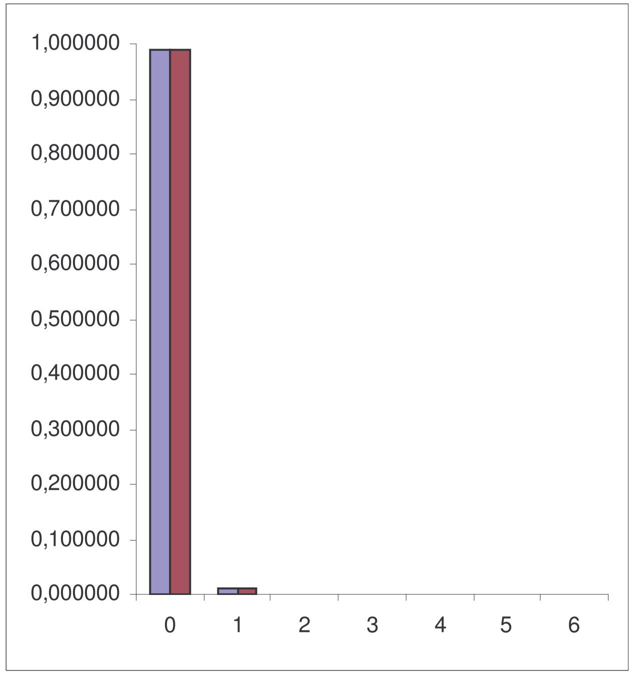
n=	100
p=	0,1%
λ=	0,1



| ***Poisson –Binom*** | < 0,0173 Prozentpunkte

9.7A (Fall 3)

n=	100
p=	0,01%
λ=	0,01



| ***Poisson –Binom*** | < 0,0002 Prozentpunkte