

Grenzwertsätze I

Näherung der Hypergeometrischen Verteilung durch die Binomialverteilung

Auf Grund hoher Parameter ist es häufig praktisch nicht möglich, die Werte der Hypergeometrischen Verteilung zu berechnen. Wenn der Quotient W/N sehr klein ist, kann man die Hypergeometrische Verteilung allerdings näherungsweise mittels der Binomialverteilung berechnen.

Beispiel: Lotto „6 aus N“

Wir demonstrieren nun die Näherung der Hypergeometrischen Verteilung (im Folgenden als **Hypergeom** abgekürzt) durch die Binomialverteilung (im Folgenden als **Binom** abgekürzt) an drei verschiedenen Lottoverfahren

- (1) 6 aus 18
- (2) 6 aus 49
- (3) 6 aus 150

Wenn die Zahl der W „richtigen“ Kugeln gegenüber der Gesamtzahl N der Kugeln nur klein ist, dann kann man den Effekt des Nicht-Zurücklegens vernachlässigen. Wir betrachten dann die Lottoziehung (*näherungsweise*) als eine Ziehung mit Zurücklegen und können die Binomialverteilung anwenden und es gilt für die Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p = \frac{W}{N}$$

Die für die drei Lottoverfahren errechneten Werte der Hypergeometrischen Verteilung bzw. der Binomialverteilung für $k=0,1,2,3,4,5,6$ „Richtige“ weichen um so mehr voneinander ab, je größer W im Verhältnis zu N (d.h. je größer p ist). Sie sind in der Abb. „Grenzwerte I“ dargestellt.

Für (1) gilt:

$$p = \frac{W}{N} = \frac{6}{18} = 0,33333\dots$$

Dabei beträgt die Summe der absoluten Abweichungen

$$| \text{Hypergeom} - \text{Binom} | = 17,7 \text{ Prozentpunkte}$$

Für (2) gilt:

$$p = \frac{W}{N} = \frac{6}{49} = 0,12244\dots$$

Dabei beträgt die Summe der absoluten Abweichungen

$$| \text{Hypergeom} - \text{Binom} | = 6,2 \text{ Prozentpunkte}$$

Für (3) gilt:

$$p = \frac{W}{N} = \frac{6}{150} = 0,04$$

Dabei beträgt die Summe der absoluten Abweichungen

$$| \textit{Hypergeom} - \textit{Binom} | = 1,24 \textit{ Prozentpunkte}$$

Wächst N auf 1000, dann liegt die Differenz $|\textit{Hypergeom} - \textit{Binom}|$ bei $0,034$ *Prozentpunkten*. Wächst N unbeschränkt, dann geht die Differenz $|\textit{Hypergeom} - \textit{Binom}|$ gegen Null.

Ergebnis

Diese näherungsweise Berechnung kann man sich bei kleinen Stichproben aus großen Grundgesamtheiten zu Nutze machen. Dies ist z.B., bei der Qualitätskontrolle der Fall. Dort betrachtet man den Effekt des Zurücklegens als quantitativ vernachlässigbar. Obwohl es sich theoretisch um eine Ziehung *ohne* Zurücklegen handelt, bei der die Hypergeometrische Verteilung anzuwenden wäre, kann man nun die einfacher zu berechnende Binomialverteilung einsetzen.

Grenzwertsatz (vereinfacht)¹

Bezeichne N den Umfang der Grundgesamtheit G , W die Anzahl der Erfolge in G , n den Umfang der Stichprobe S , k die Anzahl der Erfolge in S . Ferner sei $W \ll N$. Dann gilt für **unbeschränkt wachsendes** N

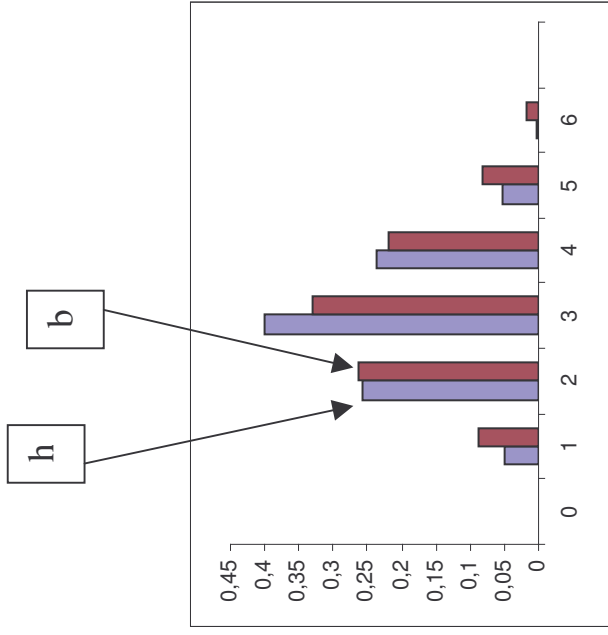
$$\lim h(k; n; W; N) = b(N; \frac{W}{N}; k)$$

¹ h (Erfolge in S ; Umfang S ; Erfolge in G ; Umfang G) bezeichne die Dichtefunktion der Hypergeometrischen Verteilung.
 b (Erfolge in S ; Erfolgswahrscheinlichkeit; Anzahl_Versuche) bezeichne die Dichtefunktion der Binomialverteilung.

Grenzwerte I

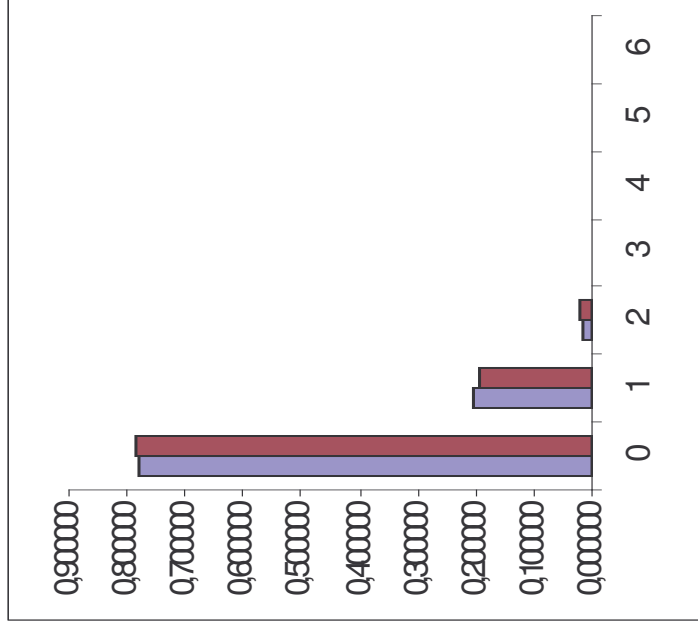
Lotto „6 aus 18“²

$n=$ 6
 $W=$ 6
 $N=$ 18
 $p=W/N=$ 0,33333333



Lotto „6 aus 49“

$n=$ 6
 $W=$ 6
 $N=$ 49
 $p=W/N=$ 0,12244898



Lotto „6 aus 150“

$n=$ 6
 $W=$ 6
 $N=$ 150
 $p=W/N=$ 0,04

² N bezeichnet den Umfang der Grundgesamtheit und damit die maximale Anzahl der Ziehungen bei der Ziehung ohne Zurücklegen, dies entspricht der Länge der Bernoullikette als eines Modells der Ziehung mit Zurücklegen. Dagegen bezeichnet n den Stichprobenumfang, hier die Anzahl der aus der Urne gezogenen Kugeln.

| **Hypergeom-Binom** | = 17,7 Prozentpunkte

| **Hypergeom-Binom** | = 6,2 Prozentpunkte

| **Hypergeom-Binom** | = 1,24 Prozentpunkte

