

Grundlagen der Mathematik I (Harder/Krause)

Aufgabenbogen 2

Abgabetermin: 7. Kalenderwoche

I. Nachfrage/ Angebot/ Gleichgewicht

Für eine Ware seien die Nachfrage- und die Angebotskurve durch die Funktionsgleichungen

$$p_N(x) = \frac{1}{2} (36 - x^2) \quad \text{und}$$

$$p_A(x) = 2 (x + 1)$$

gegeben.

1. Welches Marktgleichgewicht stellt sich ein und wie hoch ist der Gesamterlös ?
2. Es soll berechnet werden, welche Angebotsüberhang entsteht, wenn der Staat einen Mindestpreis von 13 € festsetzt.
3. Die Ware werde stattdessen mit 4 €/ME versteuert.
 - 3.1. Welches neue Marktgleichgewicht stellt sich ein ?
 - 3.2. Wie ändern sich Preis und Menge durch die Besteuerung ?
 - 3.3. Wie hoch ist die Gesamtsteuer, die der Staat erzielt ?
4. Wie hoch muß der Staat die Steuerrate festsetzen, damit das Steueraufkommen für den Staat möglichst groß wird ?

II. Lagerhaltungsmodell

Wir berechnen ein einfaches Lagerhaltungsmodell. Die Menge M [t] der Mengeneinheiten eines Gutes werden gleichmäßig verbraucht. Es werden in regelmäßigen Abständen x [t] bestellt. Die Kosten eines Bestellvorgangs betragen B [€].

Der Stückpreis des Gutes betrage 2 €/t. Der Wert des im Lager gebundenen Kapitals werde mit dem Zinssatz p (Jahreszins) verzinst.

1. Wie lauten die Gesamtkosten für $m=20000$ t, $B = 400$ €, $p = 4$.
2. Stellen Sie die Gesamtkostenfunktion graphisch dar !
3. Der Händler muß mit steigenden Zinsen rechnen. Bei welchem Zinssatz müssen mehr als 10 Bestellungen pro Jahr getätigt werden ?
4. Dem Händler wird eine Preiserhöhung um 15 Prozent angekündigt. Er will noch eine Bestellung zum bisherigen Preis tätigen. Welche Bestellmenge ist bei der o.g. Preiserhöhung optimal ?

III. Betriebsoptimum

1. Ein Unternehmen montiert Flugzeugmodelle der Modellbaureihe *XtraVagant* ist Monopolist auf dem Markt. Im vergangenen Monat wurden **30** derartige Modelle verkauft. Diese Stückzahl konnte zum Gleichgewichtspreis von **3.220** € abgesetzt

werden. Das Unternehmen hat ein Marktforschungsinstitut beauftragt, die Chancen für eine Steigerung des Absatzes bzw. für Preiserhöhungen zu untersuchen. Das Meinungsforschungsinstitut erwartet bei einer Preiserhöhung um **130 €** / Stück allerdings einen Absatzrückgang von **30** auf **25** Stück monatlich. Untersuchen Sie folgende Fragen:

- 1.1 Bestimmen Sie unter der Voraussetzung eines linearen Nachfrageverhaltens für das Produkt den in etwa maximal realisierbaren Umsatz und den Absatzpreis für die umsatzmaximale Absatzmenge.
2. Die Kostenstruktur des Unternehmens wird durch die Kostenfunktion

$$K(x) = \frac{2}{9} \cdot x^3 - \frac{44}{3} \cdot x^2 + 1200 \cdot x + 4000 \text{ [€]}$$

dargestellt. Bestimmen Sie:

- 2.1 die umsatzmaximale Absatzmenge und den maximalen Umsatz.
- 2.2 das Intervall positiver Gewinne mit Erläuterung der Lösungsaussage.
- 2.3 den Absatzpreis p für die gewinnmaximale Absatzmenge. (Der zugehörige Punkt der Preis-Absatz-Funktion heißt Cournot-Punkt - kurze Definition unter <http://www.wirtschaftslexikon24.net/d/cournot-punkt/cournot-punkt.htm>)

3. Preisdifferenzierung. Der Unternehmer kann seinen Gewinn zusätzlich auch dadurch steigern, daß er den Markt von **50** Stück segmentiert und ein differenziertes Preisangebot macht. Dieses differenzierte Angebot ist allerdings mit erheblichen Kosten, u.a. Werbeaufwand von **450 €** pro Segment, verbunden.

- 3.1. Angenommen, das Unternehmen segmentiert den Markt im Rahmen dieser Marketingstrategie in 5 gleiche Segmente, in denen die Modelle *XtraVagant Premium*, *XtraVagant BA*, *XtraVagant 2010*, *XtraVagant SportIV* und der *XtraVagant* zu differenzierten Preisen angeboten werden. Zu welchen Preisen kann das Unternehmen den Anhänger in den einzelnen Segmenten anbieten ?
- 3.2. Wie hoch ist der durch die Preisdifferenzierung entstehende zusätzliche Gewinn ?

IV. Elastizität

1. Gegeben sei die Nachfragefunktion x mit $x(p) = 5 - 0,5p$. Bestimmen Sie die Elastizität der Nachfrage für die Preise 5 und 7 €.

2. Gegeben sei die Preis-Absatz-Funktion p mit $p(x) = 20 - \frac{1}{100}x$. Bestimmen Sie die Elastizität der Nachfrage für den umsatzmaximalen Preis.

3. Gegeben sei die Preis-Absatz-Funktion p mit $p(x) = \frac{20}{x+1}$. Bestimmen Sie die Elastizität der Nachfrage im Grenzpreis und für $p = 1$ €. Analysieren Sie die Lösungen sachgerecht.

V. Lagrange-Multiplikatoren

Ein Haushalt fragt Lebensmittel (X) und Bekleidung (Y) nach. Die Nutzenfunktion sei gegeben durch

$$U(X, Y) = \ln(X) + \ln(Y)$$

Der Haushalt will seinen Nutzen optimieren. Gibt es also zwei Güter, dann stellt sich das Optimierungsproblem des Konsumenten wie folgt dar:

$$\begin{aligned} &\text{Maximiere } U(X, Y) \text{ unter der Nebenbedingung} \\ &P_X(X) + P_Y(Y) = I, \end{aligned}$$

d.h. daß das gesamte Einkommen für die beiden Güter aufgewendet wird. Berechnen Sie die Mengenkombination an Lebensmitteln und Bekleidung mit dem maximalen Nutzen für den Konsumenten, wenn der Preis für eine ME Lebensmittel $P_X=20$ € und der Preis für eine Mengeneinheit Bekleidung $P_Y= 5$ € beträgt. Dem Konsumenten stehen 1000 € zur Verfügung.

VI. Kostenfunktion

Eine Funktion k mit $k(x) = \frac{K(x)}{x}$ heißt Stückkostenfunktion. Eine solche Funktion k sei mit

der Gleichung $k(x) = 3000 + 4000x + \frac{40000}{x}$ gegeben.

Bestimmen Sie die Ausbringungsmenge mit minimalen Stückkosten.